Mecánica Cuántica I, 2010

Eduardo Menéndez
Roberto Navarro

Universidad de Chile, Facultad de Ciencias,
Departamento de Física, Santiago, Chile

Guía 1

Martes 20 de Abril 2010

1. El espacio de estados de cierto sistema físico es tri-dimensional. Sea $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ una base ortonormal de este espacio.

   Definamos

$$|\psi_o\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{i}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle\,,$$
$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|u_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|u_3\rangle\,.$$

   ¿Están normalizados estos kets?

2. Sea $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$ y $|u_3\rangle$ una base ortonormal de un espacio tridimensional complejo, y sea

$$|\phi_1\rangle = |u_1\rangle - 2|u_2\rangle\,,$$
$$|\phi_2\rangle = |u_1\rangle - i|u_3\rangle\,,$$
$$|\phi_3\rangle = |u_3\rangle\,.$$

   a) Evalúe los productos $\langle\phi_1|\phi_2\rangle$, $\langle\phi_2|\phi_3\rangle$ y $\langle\phi_3|\phi_1\rangle$.

   b) Encuentre las constantes c_1, c_2 y c_3 tal que los vectores $c_1|\phi_1\rangle$, $c_2|\phi_2\rangle$, y $c_3|\phi_3\rangle$ estén normalizados.

3. Sea $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$ y $|u_3\rangle$ una base ortonormal y sea

$$|\phi_1\rangle = \alpha\,\{i|u_1\rangle + |u_2\rangle - |u_3\rangle\}\,,$$
$$|\phi_2\rangle = \beta\{|u_2\rangle + |u_3\rangle\}\,.$$

   a) Muestre que $\langle\phi_1|\phi_2\rangle = 0$ para todo α y β.

   b) Encuentre α y β tal que $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ estén normalizados.

   c) Encuentre un vector $|\phi_3\rangle$ tal que junto a $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ formen una base ortonormal.

4. Considere los estados

$$|\psi\rangle = 9i|\phi_1\rangle + 2|\phi_2\rangle\,,$$
$$|\chi\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle\,.$$

   donde los dos vectores $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ forman una base ortonormal completa.

   a) Calcule los operadores $|\psi\rangle\langle\chi|$ y $|\chi\rangle\langle\psi|$. ¿Son estos iguales?

   b) Encuentre el complejo conjugado y el hermitico conjugado de $|\psi\rangle$, $|\chi\rangle$, $|\psi\rangle\langle\chi|$ y $|\chi\rangle\langle\psi|$.

   c) Calcule $Tr(|\psi\rangle\langle\chi|)$ y $Tr(|\chi\rangle\langle\psi|)$. ¿Son iguales?

   d) Calcule $|\psi\rangle\langle\psi|$ y $|\chi\rangle\langle\chi|$ y sus respectivas trazas $Tr(|\psi\rangle\langle\psi|)$ y $Tr(|\chi\rangle\langle\chi|)$. ¿Son estos los proyectores?

5. Sea $\hat{K}$ el operador definido como $\hat{K} = |\varphi\rangle\langle\psi|$, donde $|\varphi\rangle$ y $|\psi\rangle$ son dos vectores del espacio de estados.

a) Qué condiciones se deben cumplir para que $\hat{K}$ sea Hermitiano?

b) Calcule $\hat{K}^2$. Bajo qué condiciones es $\hat{K}$ un proyector?

c) Muestre que $\hat{K}$ siempre puede ser escrito de la forma $\hat{K} = \lambda \hat{P}_1 \hat{P}_2$, donde λ es una constante por calcular, mientras que $\hat{P}_1$ y $\hat{P}_2$ son proyectores.

6. Sea $\hat{P}_i$ el proyector ortogonal en el subespacio $\mathcal{E}_i$, con $i = \{1, 2\}$. Muestre que, para que el producto $\hat{P}_1 \hat{P}_2$ también sea ortogonal, es necesario y duficiente que $\hat{P}_1$ y $\hat{P}_2$ conmuten. En este caso, cual es el subespacio en el que $\hat{P}_1 \hat{P}_2$ proyecta?

7. Se define

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Demuestre que se cumple la relación

$$e^{i\alpha\sigma_x} = I \cos\alpha + i\sigma_x \sin\alpha \,,$$

donde I es la matriz unidad de dimensión 2×2.

8. Considere los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 4, definidos en $-1 \leq x \leq 1$, para los cuales se define el producto interno:

$$\langle P(x), Q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} P(x) Q(x) \, dx \,.$$

A partir de la base $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ obtener una base ortonormal y representar el vector $\psi(x) = x^2 - 1$ respecto a ella.

9. En el espacio vectorial del problema anterior, considere el operador

$$\hat{A} P_n(x) = \frac{dP_n}{dx} \,.$$

a) Encontrar la matriz $\mathcal{A}$ que representa a $\hat{A}$ en la base $\{\phi_n = x^n/n!\}$.

b) Encontrar la matriz $\mathcal{B}$ del operador $\hat{A}^2 = d^2/dx^2$ y verificar que $\mathcal{B} = \mathcal{A}^2$.

10. Sea $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$ y $|u_3\rangle$ una base ortonormal y sea

$$|\phi\rangle = 2|u_1\rangle + i|u_3\rangle \,,$$
$$|\psi\rangle = |u_2\rangle - |u_3\rangle \,.$$

Sea $\hat{O}$ un operador cuya representación matricial en la base $|u_i\rangle$ está dada por

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} 4 & 2i & 3 \\ -2i & 0 & 1+i \\ 3 & 1-i & -2 \end{pmatrix}$$

¿Es $\hat{O}$ hermítico? Ilustre su respuesta calculando $\langle\phi|\hat{O}|\psi\rangle$ y $\langle\psi|\hat{O}|\phi\rangle$.

11. En un espacio vectorial de dos dimensiones, considere el operador cuya matriz, en una base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle\}$, se escribe como

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿La matriz σ_y es hermitiana? Calcule sus autovalores y autovectores. Expanda estos autovectores en términos de $|1\rangle$ y $|2\rangle$.

b) Calcule las matrices de proyección en la nueva base. Luego, verifique que éstos satisfacen la ortogonalidad y relaciones de clausura.

c) Haga lo mismo para las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

y en un espacio tri-dimensional

$$L_y = \frac{\hbar}{2i}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

12. La “función” delta de Dirac se define de la siguiente manera:

a) $\delta(x-a) = 0$ para todo $x \neq a$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)\,dx = f(a)$

A partir de ello, demuestre las siguientes propiedades:

a) $\delta(x)$ es función par.

b) $\delta'(x) = -\delta'(-x)$.

c) $x\delta(x) = 0$.

d) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$, $a \neq 0$.

e) $\delta(x^2 - a^2) = \dfrac{1}{2a}[\delta(x+a) + \delta(x-a)]$, $a > 0$.

f) Si g es una función contínua, analítica y diferenciable con ceros simples en x_i, con $i = \{1, 2, \ldots\}$, entonces

$$\delta[g(x)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}$$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta^{(n)}(x)\,dx = (-1)^n f^{(n)}(0)\,.$

h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\,dk = 2\pi\delta(x)\,.$

i) Evalúe

$$\int_0^{\pi} dx \int_1^2 dy \delta(\sin x)\delta(x^2 - y^2)$$

13. Sean $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ tres operadores. Demuestre que

a) $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$.

b) $(\hat{A}\hat{B}\hat{C})^\dagger = \hat{C}^\dagger\hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$.

14. Busque los autovalores y los autovectores de la matriz $\hat{M}$ definida como

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Construya el correspondiente operador de proyección, y verifique el teorema espectral para esta matriz.

15. Encuentre los autovalores, los autovectores ortonormales y la matriz de cambio de base $\hat{U}$ para la siguiente matriz:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} & i\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 3 & i \\ -i\sqrt{2} & -i & 3 \end{pmatrix}.$$