# Mecánica Cuántica I, 2010

Eduardo Menéndez
Roberto Navarro

Universidad de Chile, Facultad de Ciencias,
Departamento de Física, Santiago, Chile

## Guía 9

**Lunes 5 de Julio 2010**

1. Encuentre los niveles de energía y las funciones de onda, para $l = 0$ y $l = 1$, para una partícula que se encuentra sometida al potencial
$$V(r) = \begin{cases} 0 & , 0 < r < a \\ \infty & , r > a. \end{cases}$$

2. Obtenga las energías y estados estacionarios de un oscilador armónico tri-dimensional isótropo, descrito por el Hamiltoniano
$$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{P_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(X^2 + Y^2 + Z^2),$$
con la condicion de que los estados estacionarios a su vez sean autovectores de $L^2$ y $L_z$. Resuelva la ecuación radial proponiendo como solución, la función asintótica para radios grandes multiplicada por una serie de potencias (es el mismo método que se usó para el oscilador unidimensional y para el átomo de hidrógeno). Escriba las autonfunciones para el estado fundamental y los primeros estados excitados. Analice la relación entre estas autofunciones y las autofunciones obtenidas por saparación de variables en coordenadas cartesianas. Vea el Complemento $\mathrm{B_{VII}}$ del texto de Cohen-Tannoudji.

3. Encuentre los niveles de energía y las funciones de onda, para $l = 0$, para una partícula que se encuentra sometida al potencial
$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & , 0 < r < a \\ 0 & , r > a \end{cases}$$
Resuelva gráficamente la ecuación trascendente que determina la cuantización de la energía. Determine la condición necesaria para que haya al menos un estado localizado en el pozo.

4. Considere un electrón confinado al interior de un cascarón cilíndrico cuyo eje coincide con el eje $z$. Se pide que la función de onda sea cero en la pared interior y exterior, $\rho = \rho_a$ y $\rho = \rho_b$, y tambien en las de arriba y abajo, $z = 0$ y $L$.

   *a*) Encuentre las autofunciones de la energía. (No se preocupe de la normalización). Muestre que los autovalores de la energía están dados por
   $$E_{lmn} = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left[k_{mn}^2 + \left(\frac{l\pi}{L}\right)^2\right] \; (l = 1, 2, 3\ldots,\; m = 0, 1, 2, \ldots)$$
   donde $k_{mn}$ es la raíz enésima de la ecuación trascendental
   $$J_m(k_{mn}\rho_b)N_m(k_{mn}\rho_a) - N_m(k_{mn}\rho_b)J_m(k_{mn}\rho_a) = 0$$

5. Considere sistemas en dos dimensiones. Encuentre los autovalores y las autofunciones para una partícula que se encuentra confinada en

   *a*) una caja cuadrada de lado $a$ con paredes rígidas impenetrables. Escriba una tabla con los primeros 4 estados, indicando su energía y degeneración.

   *b*) una caja circular de radio $r$ con paredes rígidas impenetrables. Escriba una tabla con los primeros 4 estados, indicando su energía y degeneración.

*c*) Compare los niveles de energía de ambos sistemas suponiendo que tienen la misma área. ¿Como dependen de la forma de la caja? ¿Para cual caja la razón $E_2/E_1$ es menor? ($E_1$ y $E_2$ son el estado fundamental y el primer nivel excitado, respectivamente).

6. En el tiempo $t = 0$ la función de onda del átomo de hidrógeno es

$$\psi(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{10}}(2\psi_{100} + \psi_{210} + \sqrt{2}\psi_{211} + \sqrt{3}\psi_{21-1}).$$

Ignore el espín y los efectos radiativos.

*a*) ¿Cuáles son los valor esperados de la energía de este sistema? ¿Cuál es el valor promedio?

*b*) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar este sistema con $l = 1$ y $m = +1$ como función del tiempo?

*c*) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el electrón a una distancia no mayor que $10^{-10}$ cm del protón? Aproxime su resultado.

*d*) ¿Cómo evoluciona ésta función de onda en el tiempo? O sea, encuentre $\psi(\mathbf{r}, t)$.

*e*) Suponga que cierta medida realizada muestra que $L = 1$ y $L_z = +1$. Describa la función de onda inmediatamente después de tal medida en términos de los $\psi_{nlm}$ usada arriba.