Mecánica Cuántica I, 2010

Eduardo Menéndez
Roberto Navarro

Universidad de Chile, Facultad de Ciencias,
Departamento de Física, Santiago, Chile

Guía 7

Lunes 7 de Junio 2010

1. Sea $x(t)$ el operador de coordenada para una partícula libre en una dimensión en el cuadro de Heisenberg. Evalúe
$$[x(t), x(0)]$$

2. Un electrón se mueve en una dimensión y está confinado al semiespacio positivo ($x > 0$), donde tiene la energía potencial
$$V(x) = -\frac{e^2}{4x},$$
donde e es la carga del electrón. Este es el potencial imagen de un electrón en el exterior de un conductor perfecto.
a) Encuentre la energía del estado básico. Sugerencia: Proponga $\psi(x) = A\, x \exp(-\alpha x)$.
b) Halle el valor esperado $\langle x \rangle$ en el estado básico.

3. Considere un oscilador armónico en una dimensión y los operadores de subida y bajada $a^\dagger$ y a, respectivamente.
   a) Exprese los operadores x y p en términos de $a^\dagger$ y a. Utilice este resultado en los siguientes incisos.
   b) Evalúe i) $\langle m|x|n\rangle$, ii) $\langle m|x^2|n\rangle$, iii) $\langle m|p|n\rangle$, iv) $\langle m|p^2|n\rangle$, v) $\langle m|[x,p]|n\rangle$, vi) $\langle m|\{x,p\}_+|n\rangle$, (donde $\{x,p\}_+ = xp + px$ y se llama anticonmutador de x y p).
   c) Deduzca que $\Delta x \Delta p = (\hbar/2)(2n+1)$

4. Calcule i) $\langle 1|(a - a^\dagger)^3|0\rangle = 3$, ii) $\langle 0|(a + a^\dagger)^4|0\rangle = 3$, iii) $\langle 2|(a + a^\dagger)^3|1\rangle = 6\sqrt{2}$, iv) $\langle 0|(a + a^\dagger)^5|0\rangle =?$ v) $\langle m|x^3|n\rangle$, vi) $\langle m|x^4|n\rangle$

5. Considere el siguiente hamiltoniano: $H = a\eta^\dagger\eta + b(\eta + \eta^\dagger)$ donde $\eta^\dagger\eta|n\rangle = n|n\rangle$ y $[\eta, \eta^\dagger] = 1$.
   a) Diagonalice H. Para ello defina $c^\dagger = \eta^\dagger + \alpha$, $c = \eta + \alpha$ y α un número real).
   b) Encuentre $[c, c^\dagger]$.
   c) Encuentre los valores y vectores propios.
   d) Aplique el caso anterior al caso de un oscilador armónico con una carga $(-q)$ en presencia de un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E}$. Vea el complemento F_V del texto de Cohen-Tannoudji et al.

6. Demuestre que en un oscilador armónico clásico la probabilidad de encontrar una partícula entre x y $x + dx$ es
$$\mathcal{P}_{\text{clas}}(x)dx = \frac{1}{\pi a}\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{-1/2} dx, \quad \text{con } |x| \leq a.$$
Compare esta expresión con al que se obtiene en el caso de la Mecánica Cuántica con $n = 1$. Discuta.

7. Encuentre el espectro de energía y las autofunciones para el sistema cuyo potencial es
$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2x^2 & x > 0 \end{cases}$$

8. Determine el espectro de energía para un oscilador armónico espacial

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2).$$

¿Cuál es el grado de degeneración del n-ésimo nivel si $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$?
Vea el complemento E_V del texto de Cohen-Tannoudji et al.

9. Considere un oscilador armónico unidimensional.

   a) Construya una combinación lineal de $|0\rangle$ y $|1\rangle$ tal que $\langle x\rangle$ sea lo más grande posible.

   b) Suponga que el oscilador está en el estado construido en (a) en $t = 0$. ¿Cuál es el vector de estado para $t > 0$ en el cuadro de Schroedinger?

   c) Evalue $\langle x\rangle_t$ y $\langle(\Delta x)^2\rangle_t$.

10. Considere una particula de masa m y carga q que se mueve en presencia de un campo magnético

    a) Demuestre que el operador de velocidad satisface las relaciones de conmutacion

    $$[v_k, v_j] = \frac{iq\hbar}{m^2 c}\epsilon_{kjl}B_l$$

    b) Encuentre el espectro de energía de una partícula en un campo magnético uniforme

11. Considere una partícula moviéndose en un potencial armónico unidimensional, en presencia de una interacción tipo dipolar, es decir

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{\hbar}{2m}\frac{\alpha}{x^2}$$

donde α es un parámetro que caracteriza la intensidad del campo dipolar externo. Si $\alpha > 0$ el potencial es atractivo y si $\alpha < 0$ el potencial es repulsivo. Encuentre los autovalores y las autofunciones de para este potencial. Puede guiarse por el artículo de G.Palma y U. Raff, Am. J. Phys. **71**, 247 (2003) (ver web gg).

12. Encuentre una forma alternativa de solucionar el oscilador armónico, basada en transformadas de Fourier. Para ello, estudie complemento D_V del texto de Cohen-Tannoudji et al.

13. Considere un oscilador armónico de masa m y frecuencia angular ω. A tiempo $t = 0$, el estado de este oscilador es

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n|\varphi_n\rangle\,,$$

donde $|\varphi_n\rangle$ son los estados estacionarios con energías $(n + 1/2)\hbar\omega$.

   a) ¿Cual es la probabilidad $\mathcal{P}$ de que una medición de la energía del oscilador en un tiempo $t > 0$, dé un resultado mayor que $2\hbar\omega$?
   Cuando $\mathcal{P} = 0$, ¿ Cuáles son los coeficientes c_n no nulos?

   b) Ahora, suponga que sólo c_o y c_1 son distintos de cero. Escriba la condición de normalización para $|\psi(0)\rangle$ y el valor medio $\langle\hat{H}\rangle$ de la energía en términos de c_o y c_1. Si adherimos la condición de que $\langle\hat{H}\rangle = \hbar\omega$, calcule $|c_o|^2$ y $|c_1|^2$.

   c) Como el vector de estado normalizado $|\psi(0)\rangle$ es definido sólo dentro de una fase global, fijamos este factor eligiendo c_o como un número real y positivo. Sea $c_1 = |c_1|e^{i\theta_1}$. Suponga que $\langle\hat{H}\rangle = \hbar\omega$ y que

   $$\langle\hat{X}\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,.$$

   Calcule θ_1.

d) Con $|\psi(0)\rangle$ determinado, escriba $|\psi(t)\rangle$ y calcule θ_1 para $t > 0$. Determine el valor medio de $\langle\hat{X}\rangle(t)$.

14. Dos partículas de masa m no interactuantes, con posiciones x_1 y x_2, y momentos p_1 y p_2, están sujetas al mismo potencial

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \,.$$

a) Escriba el operador $\hat{H}$, correspondiente al hamiltoniano del sistema de dos partículas. Muestre que $\hat{H}$ se puede escribir como

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 \,,$$

donde $\hat{H}_1$ y $\hat{H}_2$ actúan sólo en el espacio de estados de la partícula ① y ②, respectivamente. Calcule las autoenergías de este sistema, su degeneración y las funciones de onda correspondientes.

b) ¿Forman $\{\hat{H}\}$ y $\{\hat{H}_1, \hat{H}_2\}$ un SCOC?
Denotemos por $|\Phi_{n_1,n_2}\rangle$ los autovectores comunes a $\hat{H}_1$ y $\hat{H}_2$. Escriba la ortonormalización y relación de clausura para los estados $|\Phi_{n_1,n_2}\rangle$.

c) Considere un sistema que, a tiempo $t = 0$, se encuentra en el estado

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\Big[|\Phi_{0,0}\rangle + |\Phi_{1,0}\rangle + |\Phi_{0,1}\rangle + |\Phi_{1,1}\rangle\Big] \,.$$

¿Qué resultados pueden ser encontrados, y con qué probabilidades, si en ese instante se mide

1) la energía total del sistema?
2) la energía de la partícula ①?
3) la posición o velocidad de esta partícula?