Mecánica Cuántica I, 2010

Eduardo Menéndez
Roberto Navarro

Universidad de Chile, Facultad de Ciencias,
Departamento de Física, Santiago, Chile

Guía 6

Lunes 31 de Mayo 2010

1. Demuestre que el valor medio de un observable A en un estado $|\psi\rangle$ corresponde al valor del parámetro λ para el cual la función

$$\sigma^2(\lambda) = \langle\psi|(A-\lambda)^2|\psi\rangle$$

(Dispersión de A con respecto al valor λ) es mínima, y que este mínimo vale

$$\sigma^2_{min} = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 = (\Delta A)^2$$

es decir, la dispersión es mínima con respecto al valor medio.

2. Considere un oscilador cargado, de carga positiva q y masa m, el cual esta sujeto a un campo electrico $E_0\cos(\omega t)$; el hamiltoniano de la partícula es $\hat{H} = \hat{P}^2/(2m) + k\hat{X}^2/2 + qE_0\hat{X}\cos(\omega t)$.

   a) Calcule $d\langle\hat{X}\rangle/dt, d\langle\hat{P}\rangle/dt, d\langle\hat{H}\rangle/dt$.

   b) Resuelva la ecuación $d\langle\hat{X}\rangle/dt$ y obtenga $\langle\hat{X}\rangle(t)$ donde $\langle\hat{X}\rangle(0) = x_0$

3. Considere una partícula libre unidimensional de masa m cuya posición y momentum en tiempo $t=0$ estan dados por x_0 y p_0 respectivamente.

   a) Calcule $\langle\hat{P}\rangle(t)$ y muestre que $\langle\hat{X}\rangle(t) = p_0t^2/m + x_0$.

   b) Muestre que $d\langle\hat{X}^2\rangle/dt = 2\langle\hat{P}\hat{X}\rangle/m + i\hbar/m$ y $d\langle\hat{P}^2\rangle/dt = 0$.

   c) Muestre que las fluctuaciones de posicion y momentum estan relacionadas por $d^2(\Delta x)^2/dt^2 = 2(\Delta p)^2/m^2$ y que la solución a esta ecuación esta dada por $(\Delta x)^2 = (\Delta p)_0^2t^2/m^2 + (\Delta x)_0^2$ donde $(\Delta x)_0$ y $(\Delta p)_0$ son las fluctuaciones iniciales.

4. Un electrón se mueve libremente dentro de una caja con paredes infinitas en $x=0$ y $x=a$, en una dimensión. Si el electrón está inicialmente en el estado base $(n=1)$ de la caja y repentinamente se cuadruplica el tamaño de la caja (la parte derecha del muro se mueve instantáneamente desde $x=a$ a $x=4a$). Calcule la probabilidad de encontrar el electrón

   a) en el estado base en la nueva caja.

   b) en el primer estado excitado de la nueva caja.

5. Utilizando el principio de incerteza, muestre que la energía más baja de un oscilador es $\hbar\omega/2$.

6. Considere una partícula de masa m sujeto a un potencial delta atractivo $V(x) = -V_0\delta(x)$, donde $V_0 > 0$ (V_0 tiene dimensiones de energía por distancia).

   a) En el caso de energías negativas, muestre que esta partícula sólo tiene un estado ligado; encuentre la energía de ligazón y la función de onda.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula permanesca ligada cuando V_0 es (i) Reducido a la mitad repentinamente, (ii) quadruplicado repentinamente?

   c) Estudie el caso de *scattering* (i.e. $E > 0$) y calcule los coeficientes de reflexión y transmición como función del nḿero de onda k.

7. La independencia lineal de dos funciones u(x) y v(x) está especificada en los términos del operador Wronskiano

$$\hat{W}(u,v) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$$

Así si u y v son soluciones de una ecuación lineal de segundo orden, y $W(u,v) \neq 0$ en algún intervalo, las funciones u y v son soluciones independientes en aquel intervalo. Utilizando este criterio establezca que las dos funciones $\{u,v\} = \{\cos(kx), \sin(kx)\}$ son independientes sobre todo el eje x. ¿Cual es el valor de W para este caso?

8. Considere la ecuación de Schrödinger unidimensional e independiente del tiempo para un potencial arbitrario $V(x)$. Pruebe que si una solución $\psi(x)$ tiene la propiedad que $\psi(x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$, etonces la solución debe ser no degenerada y por lo tanto real, aparte de un posible factor de fase. Indicación: Muestre que una suposición contraria lo llevaría a una contradicción.

9. Considere el siguiente potencial unidimensional:

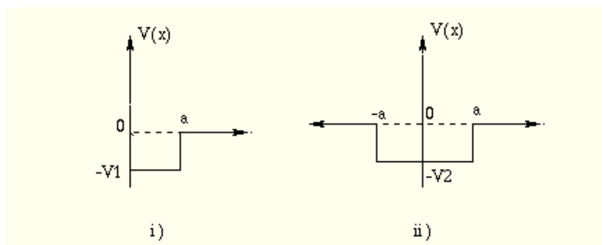

Figura 1:

a) ¿Puede cada uno soportar un estado ligado para una profundidad $V_i (i = 1, 2)$ arbitrariamente pequeña? Explique cualitativamente.

b) Para $V_1 = V_2$, ¿cual es la relación entre las energías de los dos estados ligados?

c) Para estados contínuos de una energía dada ¿Cuantas soluciones independientes se pueden tener?

10. Considere una partícula de masa m sujeta al potencial

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x \leq 0 \\ -V_0 \delta(x-a) & x > 0 \end{cases}$$

donde $V_0 > 0$. Discuta la existencia de estados bases en términos del tamaño de a.

11. Una partícula de masa m está confinada a moverse dentro de una caja de tamaño a con un muro infinito en $x = 0$ y $x = a$, en presencia de un potencial delta de magnitud $V_0 > 0$ en el punto medio. Es decir

$$V(x) = \begin{cases} V_0 \delta(x - a/2) & 0 < x < a \\ \infty & \text{para el resto.} \end{cases}$$

Muestre como calcular los niveles de energía del sistema en términos de V_0, a y m. (Encontrará una ecuación trascendental).

12. Demuestre que si un operador en el cuadro de Schrödinger depende explícitamente del tiempo, entonces la ecuación dinámica para el operador correspondiente en el cuadro de Heisenberg es:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{F}_H(t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{F}_H(t) + \left[\hat{F}_H, \hat{H} \right] \ .$$

13. Sea $x(t)$ el operador de coordenada para una partícula libre en una dimensión en el cuadro de Heisenberg. Evalúe

$$[x(t), x(0)]$$

14. Un electrón se mueve en una dimensión y está confinado al semiespacio positivo ($x > 0$), donde tiene la energía potencial

$$V(x) = -\frac{e^2}{4x},$$

donde e es la carga del electrón. Este es el potencial imagen de un electrón en el exterior de un conductor perfecto.
a) Encuentre la energía del estado básico.
b) Halle el valor esperado $\langle x \rangle$ en el estado basico.

15. Calcule los coeficientes de transmisión y reflexión de una partícula que se mueve en el potencial

$$V(x) = \alpha\delta(x) + W(x) \qquad \text{, donde } \alpha > 0 \text{ y}$$

$$W(x) = \begin{cases} 0 & \text{,para } x < 0 \\ V_0 & \text{,para } x > 0 \end{cases} .$$

Haga el gráfico de $D(E)$ y $R(E)$ y saque sus conclusiones. Compare los resultados con el caso de $\alpha = 0$ y especifique la diferencia y similitud entre ambos casos.