Mecánica Cuántica I, 2010

EDUARDO MENÉNDEZ
ROBERTO NAVARRO

Universidad de Chile, Facultad de Ciencias,
Departamento de Física, Santiago, Chile

Guía 5

Lunes 24 de Mayo 2010

1. Encuentre las autoenergías y las autofunciones del Hamiltoniano del oscilador armónico

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Proceda de la siguiente manera:

a) Proponga los cambios de variables $x = \beta\zeta$ y $E = \lambda\varepsilon$ y obtenga β y λ para que la ecuación de autovalores presente la forma adimensional

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{2}\zeta^2\right]\phi(\zeta) = \varepsilon\phi(\zeta).$$

b) Pruebe que $\phi(\zeta) \sim \exp(\pm\zeta^2/2)$ satisface asintóticamente la ecuación anterior, para valores grandes de ζ.

c) Proponga la solución $\phi(\zeta) = \exp(-\zeta^2/2)h(\zeta)$ y obtenga la ecuación diferencial que debe satisfacer $h(\zeta)$.

d) Resuelva esta ecuación diferencial proponiendo la serie

$$h(\zeta) = \zeta^p(a_0 + a_2\zeta^2 + a_4\zeta^4 + ... + a_{2m}\zeta^{2m} + ...)$$

Note que de acuerdo al valor que tome p, la función $h(\zeta)$ es par o impar. ¿Por qué podemos buscar las soluciones de esta forma? Obtenga relaciones de recurrencia entre los coeficientes a_{2m} y a_{2m+2}.

e) La condición de cuantización se obtiene obligando a que la función $\phi(\zeta) = \exp(-\zeta^2/2)h(\zeta)$ sea normalizable. Pruebe que para ello es necesario que la función $h(\zeta)$ sea exprese por una serie con un número finito de términos, o sea, que $h(\zeta)$ sea un polinomio.

f) Utilice la condición anterior para encontrar los autovalores de la energía.

g) Obtenga expresiones explícitas para las funciones de onda de los tres estados de menor energía. Exprésela en términos de la variable original x.

Bibliografía: Complemento C_V de Quantum Mechanics, Cohen-Tannoudji, Diu y Laloë.