Mecánica Cuántica I, 2010

Eduardo Menéndez
Roberto Navarro

Universidad de Chile, Facultad de Ciencias,
Departamento de Física, Santiago, Chile

Guía 4

Lunes 10 y 17 de Mayo 2010

1. Considere un sistema cuyo estado está dado en términos de un conjunto ortonormal completo de 5 vectores $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, $|\psi_3\rangle$, $|\psi_4\rangle$ y $|\psi_5\rangle$ como sigue:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{19}}|\psi_1\rangle + \frac{2}{\sqrt{19}}|\psi_2\rangle + \sqrt{\frac{2}{19}}|\psi_3\rangle + \sqrt{\frac{3}{19}}|\psi_4\rangle + \sqrt{\frac{5}{19}}|\psi_5\rangle$$

donde $|\psi_n\rangle$ son autoestados del hamiltoniano del sistema, $\hat{H}|\psi_n\rangle = n\epsilon_0|\psi_n\rangle$, con $n = 1, 2, 3, 4, 5$, y ϵ_0 tiene dimensiones de energía.

a) Si se mide la energía sobre un gran número de sistemas idénticos que están todos inicialmente en el mismo estado $|\phi\rangle$, ¿que valores se pueden obtener y con que probabilidad?

b) Encuentre la energía promedio del sistema.

2. Considere, en un problema unidimensional, una partícula de masa m cuya función de onda es $\psi(x, t)$

a) En el instante t se mide la distancia d de la partícula al origen. Escriba, como función de $\psi(x, t)$ la probabilidad de que el valor medido sea mayor que cierto valor d_0. ¿Cuáles son los límites cuando $d_0 \to 0$ y $d_0 \to \infty$?

b) En vez de medir la distancia, se mide la velocidad v de la partícula en un tiempo dado t. Exprese, como función de $\psi(x, t)$ la probabilidad de que el valor medido sea mayor que determinado valor v_0.

3. Considere una partícula de masa m sometida al potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ +\infty & \text{si } x < 0 \text{ o } x > a \end{cases}$$

sean $|\phi_n\rangle$ los autovectores del Hamiltoniando H del sistema, y sus autovalores son dados por la expresion $E_n = E_0 n^2$, con $E_0 = \pi^2\hbar^2/2ma^2$. El estado de la partícula en $t = 0$ es

$$\psi(0)\rangle = a_1|\phi_1\rangle + a_2|\phi_2\rangle + a_3|\phi_3\rangle + a_4|\phi_4\rangle$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al medir la energía de la partícula en el estado $\psi(0)\rangle$ se obtenga un valor menor que $3\pi^2\hbar^2/ma^2$?

b) ¿Cuál es el valor promedio y cuál es la desviación r.m.s de la energía de la partícula en el estado $|\psi(0)\rangle$?

c) Calcule el vector de estado $|\psi(t)\rangle$. Diga si los resultados de los incisos anteriores son válidos en un instante arbitrario t.

d) Si al medir la energía se obtiene $8\pi^2\hbar^2/ma^2$, ¿cuál es el vector de estado de la partícula inmediatamente después de medir? Si se vuelve a medir la energía, ¿cuál es el resultado?

4. Una variable dinámica es representada en la base $|u_i\rangle$ por la siguiente matriz hermítica:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & i/\sqrt{2} & -i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 1 & 1 \\ i\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En un cierto tiempo t el vector de estado del sistema está dado por $|\psi\rangle = |u_3\rangle$.

a) ¿Cuáles son los posibles resultados de una medida de $\hat{A}$ y su correspondiente probabilidad?

b) ¿Cuál es el valor medio de $\hat{A}$ y cuál es la desviación estándar de $\hat{A}$ en el estado $|\psi\rangle$

5. El hamiltoniano de un sistema cuántico y una variable dinámica $\hat{K}$ están representada por las siguientes matrices:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & -E \end{pmatrix}, \qquad \hat{K} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

Suponga que en $t = 0$ la probabilidad que una medida de $\hat{K}$ entregue un valor $-b$ sea igual a 1.

a) ¿Cuál es el vector de estado en $t = 0$?

b) ¿Cuál es la probabilidad que una medida de $\hat{K}$ entregue $-b$ en cualquier otro tiempo $t > 0$?

6. Considere un sistema físico, cuyo hamiltoniano $\hat{H}$ y su estado inicial $|\psi_0\rangle$ están dados por:

$$\hat{H} = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad |\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde ϵ tiene dimensiones de energía.

a) ¿Que valores obtendremos cuando midamos la energía y con que probablidades?

b) Calcule $\langle \hat{H} \rangle$, el valor esperado del hamiltoniano.

7. Considere un sistema cuyo estado (en cierto tiempo t) y dos observables están dados por

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una medida de $\hat{A}$ en el tiempo t entregue -1?

b) Consideremos un conjunto de dos medidas, donde $\hat{B}$ es medido primero y luego, inmediatamente después, $\hat{A}$ es medido. Encuentre la probabilidad de obtener el valor 0 para $\hat{B}$ y el valor 1 para $\hat{A}$.

c) Ahora medimos $\hat{A}$ primero y luego $\hat{B}$. Encuentre la probabilidad de obtener un valor de 1 para $\hat{A}$ y un valor de $\hat{0}$ para $\hat{B}$.

d) Compare los resultados de b) y c). Explique.

8. Sea $\hat{A}_\theta$ el operador asociado a la medición de cierta variable dinámica de un sistema dado en la dirección θ. En cierta base, este operador está representado por la matriz

$$A_\theta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

a) ¿Puede $\hat{A}_\theta$ asociarse realmente a un observable físico?

b) Calcular los autovectores, ortonormalizarlos y verificar la completitud de la base obtenida.

c) ¿Cuáles son los valores posibles que se obtienen al medir este observable?

d) Se mide $\hat{A}_z$ ($\hat{A_{\theta=0}}$) y se obtiene como resultado a_1 ($\geq a_2$.) Se vuelve a medir $\hat{A}_z$. ¿Cuál es la probabilidad de obtener a_2?

e) Se mide $\hat{A}_z$ y se obtiene a_1. Luego se mide $\hat{A}_\theta$ (θ arbitrario). ¿Qué se obtiene? ¿Hay algún θ para el cual se obtenga a_2 con certeza?

f) Se mide $\hat{A}_z$ y se obtiene a_2. Luego se mide $\hat{A_{\pi/2}}$ y se obtiene a_1. ¿Qué probabilidad hay de obtener a_2 al medir $\hat{A}_z$?

9. El operador hermítico asociado con una variable dinámica $\hat{A}$ de cierto sistema físico se representa en la base $|u_i\rangle$ como :

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{6} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{6} & 4 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & 5 \end{pmatrix}$$

   a) Muestre que los autovalores y autovectores del operador $\hat{A}$ están dados por:

$$\begin{array}{rclrcl} a_1 & = & 0, & |a_1\rangle & = & \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|u_3\rangle \\ a_2 & = & 6, & |a_2\rangle & = & \frac{1}{\sqrt{3}}|u_2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|u_3\rangle \\ a_3 & = & 6, & |a_3\rangle & = & \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|u_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|u_3\rangle\ . \end{array}$$

   b) Si en $t = 0$ el estado del sistema está representado por el vector $|\psi\rangle = |u_3\rangle$, encuentre, para un tiempo $t > 0$, la probabilidad de obtener cada posible resultado de una medición de $\hat{A}$;

   c) Calcule el valor medio y la desviación estándar de $\hat{A}$.

10. Sea $\hat{H}$ un hamiltoniano dependiente del tiempo y sean $|E_1\rangle$ y $|E_2\rangle$ dos vectores ortonormales de $\hat{H}$ con autovalores E_1 y E_2. Sea $|\psi(t)\rangle$ dado por ($C_1 \neq 0 \neq C_2$):

$$|\psi(t)\rangle = C_1 \exp(-iE_1 t/\hbar)|E_1\rangle + C_2 \exp(-iE_2 t/\hbar)|E_2\rangle$$

   a) Calcula la varianza de $\hat{H}$ en $|\psi\rangle$.

   b) Muestre que la $\mathrm{var}(\hat{H}) = 0$ sí y sólo sí $E_1 = E_2$.

11. Considere un sistema físico tridimensional cuyo estado es descrito por la base ortonormal formada por los kets $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle$. En esta base el operador Hamiltoniano $\hat{H}$ del sistema y los dos observables $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son:

$$\hat{H} = \hbar\omega_o \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};\ \hat{A} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ \hat{B} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde ω_o, a y b son constantes reales positivas. El sistema físico en tiempo t=0 está en el estado:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$

   a) Si en $t = 0$ se mide la energía del sistema, ¿qué valores pueden ser encontrados y con que probabilidad?. Para el sistema en el estado $|\psi(0)\rangle$, calcule el valor medio (valor esperado) de $\langle\hat{H}\rangle$ y la desviación cuadrática media (varianza) ΔH.

   b) Si en vez de medir $\hat{H}$ en $t = 0$, se mide $\hat{A}$, ¿qué valores pueden ser encontrados, y con que probabilidad? ¿Cual es el estado inmediatamente después de la medición?

   c) Calcule el estado $|\psi(t)\rangle$ del sistema para un tiempo t cualquiera.

   d) Calcule el promedio $\langle\hat{A}\rangle$ y $\langle\hat{B}\rangle$ para un tiempo t cualquiera. ¿Qué conclusiones podemos sacar?

   e) ¿Qué resultados son obtenidos si medimos el observable $\hat{A}$ en un tiempo t? Repita lo mismo para el observable $\hat{B}$. Interprete.

12. Considere un sistema físico tridimensional cuyo espacio de estados es generado por la base ortonormal formada por los kets $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle$. En la base de estos tres vectores, tomados en ese orden, los dos operadores $\hat{H}$ y $\hat{B}$ están definidos por

$$\hat{H} = \hbar\omega_o \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};\ \hat{B} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

donde ω_o y b son constantes reales positivas. Suponga que a $t = 0$ la probabilidad de que la medición de $\hat{B}$ tenga un valor $-b$ es 1.

a) ¿Cuál es el vector de estado a $t = 0$?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una medición de $\hat{B}$ de $-b$ en cualquier tiempo t posterior?

13. Considere nuevamente el hamiltoniano $\hat{H}$ y la variable dinámica $\hat{B}$ definida en el Problema anterior. Suponga que a $t = 0$ el vector de estado es

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle - |u_2\rangle).$$

a) Encuentre $|\psi(t)\rangle$ para todo t.

b) Calcule el valor medio de $\hat{B}$ en $|\psi(t)\rangle$ y compruebe que este no depende del tiempo.

14. Un electrón se mueve libremente dentro de una caja con paredes infinitas en $x = 0$ y $x = a$, en una dimensión. Si el electrón está inicialmente en el estado base ($n = 1$) de la caja y repentinamente se cuadruplica el tamaño de la caja (la parte derecha del muro se mueve instantáneamente desde $x = a$ a $x = 4a$). Calcule la probabilidad de encontrar el electrón

a) en el estado base en la nueva caja.

b) en el primer estado excitado de la nueva caja.

15. Considere un una caja potencial

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & \text{para el resto} \end{cases}$$

a) Estimar la energía del estado base en el primer y segundo estado excitado para

1) Un electrón encerrado en una caja de tamaño 10^{-10} m (exprese su respuesta en eV, usando los valores de: $\hbar c = 200$ MeV fm, $m_e c^2 = 0.5$ MeV).

2) Una esfera metálica de 1 g que se mueve en una caja de tamaño $a = 10$ cm. Exprese su respuesta en Joules.

b) Discuta la importancia del efecto cuántico de los dos sistemas.

c) Use el principio de incertidumbre para estimar la velocidad del electrón y la esfera metálica.

16. Un electron está confinado en una "caja" de potencial de paredes infinitas, cuyo ancho es 3×10^{-10} m. Calcule:

a) los tres primeros niveles de energía permitida del electrón;

b) la longitud de la onda electromagnética que podría excitar al electrón del primer al tercer nivel;

c) todas las posibles longitudes de onda de la radiación emitida al desexcitarse el electrón.

17. Considere la función de onda unidimensional

$$\psi(x) = A\left(\frac{x}{x_o}\right)^n e^{-x/x_o}$$

donde A, n y x_o son constantes. Usando la ecuación de Schrödinger encuentre el potencial $V(x)$ y la energía E para la cual esta función de onda es una autofunción (Suponga que cuando $x \to \infty$ $V(x) \to 0$)

18. Use la relación de conmutación entre el momentum p y la posición x para obtener las ecuaciones que describen la evolución temporal de $\langle x\rangle$ y $\langle p\rangle$ dado por los hamiltonianos.

a)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2 x + \epsilon)$$

b)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{A}{x^2}$$

Resuelva para el primer Hamiltoniano estas ecuaciones.

19. Cual es el valor esperado del momentum $\langle p \rangle$ para una partícula en el estado $\psi(x,t) = A\exp(-ax^2 - \omega t)\sin(kx)$. ¿Puede obtener el valor por argumentos cualitativos, sin hacer integrales?

20. Considere la función de onda tri-dimensional.

$$\psi(x,y,z) = Ne^{-\left[\frac{|x|}{2a}+\frac{|x|}{2b}+\frac{|x|}{2c}\right]}$$

   a) Calcule la constante de normalización N.

   b) Calcule la probabilidad de que una medición de X de un resultado entre 0 y a.

   c) Calcule la probabilidad de medir simultáneamente X e Y, de manera que los valores medidos cumplan $-b < y < b$ y $-c < z < c$.

   d) ¿Para qué potencial esta función de onda representa un estado estacionario?

21. Sea $\mathbf{J}$ la corriente de probabilidad asociada con una función de onda $\psi(\mathbf{r})$.

   a) Pruebe que $m\int d^3\mathbf{r}\ \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{P} \rangle$.

   b) Considere el operador de momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}$. Pruebe que

$$m\int d^3\mathbf{r}\ \ \mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{L} \rangle$$

22. Considere un problema unidimensional con dos partículas (1) y (2), a las que se asocia una función de onde $\psi(x_1, x_2)$.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar, en una medición de las posiciones X_1 y X_2, un resultado tal que

$$x \le x_1 \le x + dx$$
$$\alpha \le x_2 \le \beta$$

   b) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar la partícula (1) entre x y $x + dx$, cuando no se hace ninguna medición de X_2.

   c) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al menos una de estas partículas entre α y β?

   d) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar una y sólo una de estas partículas entre α y β?

   e) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el momento de la partícula (1) entre p' y p''? y simultaneamente la posición de la partícula (2) entre α y β. ¿Es posible medir simultáneamente el momento y la posición de la partícula (1)?

   f) Se mide la distancia algebraica entre las dos partículas $X_1 - X_2$. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un resultado entre $-d$ y d?

23. En un problema bidimensional, considere una partícula de masa m, cuyo hamiltoniano se escribe

$$H = H_x + H_y = \frac{P_x^2}{2m} + V(X) + \frac{P_y^2}{2m} + V(Y).$$

La energía potencial $V(x) + V(y)$ es cero si x o y pertenecen al intervalo $[0, a]$, is es infinita fuera de esa región.

   a) De los siguientes conjuntos de operadores, cuáles forman CCOC?

$$\{H\}, \{H_x\}, \{H_x, H_y\}, \{H, H_y\}$$

b) Considere una partícula cuya función de onda es

$$\psi(x,y) = N \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right).$$

cuando $0 < x < a$ y $0 < y < a$ y cero fuera de la caja.

1) Si se mide la energía de la partícula en este estado, qué valores se pueden encontrar? ¿Con qué probabilidades? ¿Cuál es el valor medio de la energía de la partícula?
2) Si se mide el observable H_x, ¿qué valores se pueden encontrar? ¿Con qué probabilidades? Si esta medición da $\pi^2\hbar^2/2ma^2$, ¿cuál será el resultado de una medición de H_y inmediatamente después? ¿Con qué probabilidades?
3) Si en lugar de medir H_x y H_y, se mide simultáneamente H_x y P_y, ¿cuál es la probabilidad de obtener

$$E_x = \frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \quad \text{y} \quad p_0 \leq p_y \leq p_0 + dp \quad ?$$