Mecánica Cuántica I, 2010

Eduardo Menéndez
Roberto Navarro

Universidad de Chile, Facultad de Ciencias,
Departamento de Física, Santiago, Chile

Guía 3

Lunes 3 de Mayo 2010

1. Demuestre que los operadores lineales cumplen las siguientes relaciones
   a) $[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$
   b) $[\hat{B} + \hat{C}, \hat{A}] = [\hat{B}, \hat{A}] + [\hat{C}, \hat{A}]$
   c) $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$
   d) $[\hat{C}, \hat{A}\hat{B}] = \hat{A}[\hat{C}, \hat{B}] + [\hat{C}, \hat{A}]\hat{B}$

2. Diga si los siguientes operadores son hermíticos:

$$
\begin{array}{ccc}
x\hat{p}_x, & x\hat{p}_z, & \frac{1}{2}(z\hat{p}_z + \hat{p}_z z), \\
\frac{1}{m}\hat{\vec{p}} \times \vec{B}(\vec{r}), & \vec{A}(\vec{r}) \cdot \hat{\vec{p}}, &
\end{array}
$$

3. El operador correspondiente al observable momentum angular es $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$. Demuestre:
   a) $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$, donde $i = 1, 2, 3$ y ϵ_{ijk} es el símbolo de de Livi-Civita.
   b) $[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0$ con $\hat{L}^2 = \sum_{i=1}^{3} \hat{L}_i^{\,2}$.
   c) $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{L}}^\dagger$.
   d) ¿Que conclusiones sacaría de (a) y (b)?

4. Demuestre que para todo operador hermítico $\hat{F}(\lambda)$ que posea un espectro discreto y dependa de cierto parámetro λ, se cumple que

$$
\frac{\partial F_n(\lambda)}{\partial \lambda} = \left\langle \frac{\partial \hat{F}_n(\lambda)}{\partial \lambda} \right\rangle,
$$

   donde el valor medio se calcula en el autoestado $\Psi_n(\lambda, \vec{r})$, que es autofunción de $\hat{F}(\lambda)$ con autovalor $F_n(\lambda)$.

5. Considere el operador hamiltoniano H de una partícula en un problema unidimensional

$$
\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{P}^2 + V(X),
$$

   donde $\hat{X}$ y $\hat{P}$ son los operadores de posición y momento, cumpliendo la relación $[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar$. Los autovectores de $\hat{H}$ se denotan por $|n\rangle$, o sea, $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$, donde n es un indice discreto.
   a) Para un operador arbitrario $\hat{A}$ pruebe que $\langle n|[\hat{A}, \hat{H}]|\rangle n = 0$.
   b) Calcule los conmutadores $[\hat{H}, \hat{P}]$, $[\hat{H}, \hat{X}]$, $[\hat{H}, \hat{X}\hat{P}]$
   c) Pruebe que $\langle n|\hat{P}|n'\rangle = \alpha\langle n|\hat{X}|n'\rangle$, donde α es un coeficiente que depende de $E_n - E_{n'}$. Hint: considere el conmutador $[\hat{X}, \hat{H}]$.
   d) Usando el resultado anterior y la relación de clausura, pruebe que

$$
\sum_{n'} (E_n - E_{n'})^2 |\langle n|\hat{X}|n'\rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{m^2}\langle n|\hat{P}^2|n\rangle
$$

6. Demuestre que si una partícula se encuentra en un estado estacionario del espectro discreto, el valor medio del momentum lineal es cero. Hint: Pruebe que $[\hat{\vec{r}}, \hat{H}] = \frac{i\hbar}{m}\hat{\vec{p}}$ y utilice este resultado.

7. Demuestre que el valor medio del momentum dipolar eléctrico de una partícula cargada en un estado con paridad bien definida, es igual a cero.

8. Demuestre que el valor medio del momentum angular orbital $\hat{\vec{L}}$ en cualquier estado estacionario no degenerado es cero.

9. El operador de inversión se define a través de la relación $\hat{J}\Psi(\vec{r}) = \Psi(-\vec{r})$. Demuestre que este operador es lineal y anticonmuta con $\vec{r}$ y $\hat{\vec{p}}$. Se dice que dos operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ anticonmutan si $\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A} = 0$.

10. Considere un sistema cuyo Hamiltoniano esta dado por $\hat{H} = \alpha(|\psi_1\rangle\langle\psi_2| + |\psi_2\rangle\langle\psi_1|)$, donde α es un número real que tiene dimensiones de energía.

    a) ¿Es $\hat{H}$ un operador de proyección?, ¿que puede decir de $\alpha^{-2}\hat{H}^2$?
    b) Muestre que $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ no son autoestados de $\hat{H}$.
    c) Calcule los conmutadores $[\hat{H}, |\psi_1\rangle\langle\psi_2|]$ y $[\hat{H}, |\psi_2\rangle\langle\psi_2|]$, y encuentre la relación entre ellos.
    d) Encuentre los autoestados normalizados de $\hat{H}$ y su correspondiente autovalor de la energía.
    e) Suponiendo que $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ forman una base ortonormal completa, encuentre la matriz que representa a $\hat{H}$ en la base. Encuentre los autovalores y autovectores de la matriz y compare los resultados con aquellos deducidos previamente.

11. Considere un sistema físico cuyo espacio de estados está generado por tres kets $|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle$. En esta base, tomadas en ese orden, los dos operadores $\hat{H}$ y $\hat{B}$ estan definidos por:

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \hat{B} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

    a) Muestre explícitamente que $\hat{H}$ y $\hat{B}$ conmutan
    b) Encuentre una base ortonormal de autovectores comunes a $\hat{H}$ y $\hat{B}$ y exprésela como kets rotulados por sus autovalores.
    c) De los siguientes conjuntos de operadores, ¿cuales forman un conjunto completo de observables que conmutan? $\{\hat{H}\}, \{\hat{B}\}, \{\hat{H}, \hat{B}\}, \{\hat{H}^2, \hat{B}\}$.

12. En el espacio de estados definido en el problema anterior se definen dos nuevos operadores $\hat{L}_z$ y $\hat{S}$ del siguiente modo:

$$\hat{L}_z|u_1\rangle = |u_1\rangle, \quad \hat{L}_z|u_2\rangle = 0, \quad \hat{L}_z|u_3\rangle = -|u_3\rangle$$
$$\hat{S}|u_1\rangle = |u_3\rangle, \quad \hat{S}|u_2\rangle = |u_2\rangle, \quad \hat{S}|u_3\rangle = |u_1\rangle$$

    a) Escriba las matrices que representan a los operadores $\hat{L}_z, \hat{L}_z^2, \hat{S}, \hat{S}^2$, en la base de los $|u_i\rangle$. ¿Corresponden estos operadores a observables?
    b) Encuentre la forma más general para un operador que conmuta con $\hat{L}_z$. Lo mismo para $\hat{L}_z^2$ y S^2.
    c) ¿Forman $\hat{L}_z^2$ y $\hat{S}$ un CCOC? Encuentre la base de autovectores comunes.

13. Evalúe el conmutador $[x, \exp(ip_x a/\hbar)]$ y demuestre que $\exp(ip_x a/\hbar)|x'\rangle$ (con $x|x'\rangle = x'|x'\rangle$) es un autoestado del operador de posición x. ¿Cuál es el correspondiente autovalor?

14. Un potencial local es descrito por el operador $\hat{W}$, cuya representación en coordenadas es diagonal, es decir, $\langle x|\hat{W}|x'\rangle = \delta(x-x')W(x)$ ¿Cual es la correspondiente propiedad en representación de momenta, $\langle p|\hat{W}|p'\rangle$?

15. Suponga que cierta partícula está descrita por la función de estado $\psi(x) = c\exp(iqx - \alpha x^2)$, donde c es una constante de normalización mientras que q y α son parámetros reales. Calcule el promedio del operador momentum de las dos maneras siguientes:

    a) usando la representación de coordenadas

    $$\langle p\rangle = \int \psi^*(x)(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})\psi(x)dx$$

    b) usando la representación de momenta obtenga la distribución de probabilidad y entonces calcule el promedio del momentum $\langle p\rangle$ de esa distribución.

    c) calcule $\langle p^2\rangle$ usando apropiadamente las generalizaciones de los métodos utilizados en las partes anteriores.

16. *a*) Pruebe que el teorema del virial en una dimensión toma la forma:

    $$\langle\frac{p^2}{2m}\rangle = \frac{1}{2}\langle x\frac{dV}{dx}\rangle$$

    b) Muestre que para una función de onda real $\psi(x)$ esta relación toma la forma de :

    $$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi(x)x\frac{dV}{dx}\psi(x) = -\langle V\rangle + 2\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{d\psi}{dx}xV(x)\psi(x)$$

17. Demuestre que la integral:

    $$\begin{aligned}\Psi(\vec{r},t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\; e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\Psi(\vec{k}\,)\,e^{-i\omega(\vec{k}\,)t}\\ &= \frac{C'}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\; e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\hbar k^2t/(2m))}\,e^{-\sigma_o^2k^2}\;.\end{aligned}$$

    tiene como resultado

    $$\Psi(\vec{r},t) = C\left(\frac{m}{2\pi\hbar i\,t}\right)^{3/2}\gamma^{-3}\,\exp\left(\frac{i\beta r^2}{4\sigma_o^2\gamma}\right)\;,$$

    donde β y γ vienen definidas por

    $$\beta \equiv \frac{m}{2\hbar t}\;,$$

    y

    $$\gamma = \frac{1}{4\sigma_o^2} - i\beta\;,$$

    encuentre la relación entre C y C'.

18. Considere el paquete de ondas Gaussiano para $t=0$ de una partícula libre:

    $$\psi(x,0) = Ce^{-x^2/4\sigma^2}$$

    a) Muestre que en $t=0$ $\langle\check{x}\rangle = 0$ y $\Delta\check{x} = \sigma$.

    b) Calcule $\psi(x,t)$ para todo t.

    c) Calcule $|\psi(x,t)|^2$ y muestre que el paquete de ondas no se desplaza en el tiempo, pero se dispersa.

    d) ¿Para que valor de σ la dispersión del paquete de ondas $(\Delta\check{x})^2$ en un instante t cualquiera es mínima?

19. En un problema unidimensional, considere una partícula cuya función de onda es:

$$\psi(x) = N \frac{e^{ip_o x/\hbar}}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

donde a y p_o son constantes reales y N es el coeficiente de normalización.

   a) Determine N tal que $\psi(x)$ esté normalizado

   b) Si la posición de la partícula es medida, ¿cual es la probabilidad de encontrar un resultado entre $(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}})$?

   c) Calcule el valor medio del momentum de una partícula que esta descrita por esta función de onda.

20. La función de onda para una partícula libre unidimensional está dada, para $t = 0$, por:

$$\psi(x, 0) = N \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{-|k|/k_o} \mathrm{e}^{ikx}$$

donde k_o y N son constantes.

   a) ¿Cual es la probabilidad $\mathcal{P}(p_1, 0)$ que la medición del momentum hecha a tiempo $t = 0$ de un resultado entre $-p_1$ y p_1? Esboce la función $\mathcal{P}(p_1, 0)$

   b) ¿Qué sucede con la probabilidad $\mathcal{P}(p_1, t)$ si la medición es hecha en un tiempo t?. Interprete el resultado.

   c) ¿Cual es la forma de el paquete de ondas en el tiempo $t = 0$? Calcule para este tiempo el producto $\Delta X \Delta P$. ¿Cuál es su conclusión?. Describa cualitativamente la evolución del paquete de ondas.

21. Una partícula está confinada al interior de una caja que está dividida en una parte izquierda y otra derecha por una membrana. Se cuenta con un detector que especifica totalmente el estado actual de la partícula, diciendo si se encuentra a la derecha o a la izquierda del recipiente. (A estos dos estados se les puede llamar $|D\rangle$ y $|I\rangle$, respectivamente, y se les puede considerar base ortonormal.) El Hamiltoniano es

$$\hat{H} = E(|I\rangle\langle D| + |D\rangle\langle I|) \ .$$

   a) Encuentre los autovalores y autovectores del sistema.

   b) Muestre que hay efecto túnel, es decir, que si en $t = 0$ la partícula está a la izquierda, hay una probabilidad no nula de observarla a la derecha para $t > 0$. ¿Cuál es la probabilidad de observarla a la derecha como función del tiempo?

   c) Suponga que erróneamente se usa $\hat{H} = E(|D\rangle\langle I|)$. Muestre que en tal caso no se conserva la probabilidad.