Mecánica Cuántica I, 2010

Eduardo Menéndez
Roberto Navarro

Universidad de Chile, Facultad de Ciencias,
Departamento de Física, Santiago, Chile

Guía 2

Lunes2 26 de Abril 2010

1. Muestre que el simetrizador S, definido sobre una función arbitraria $\phi(x)$ como $S\phi(x) = \frac{1}{2}[\phi(x)+\phi(-x)]$, y el antisimetrizador A, definido como $A\phi(x) = \frac{1}{2}[\phi(x) - \phi(-x)]$ son operadores de proyección.

2. Utilizando la definición de una función de un operador, $f(\hat{A}) = \sum_i f(a_i)|a_i\rangle\langle a_i|$, con $\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$ y $\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$, pruebe que la función potencia $f_n \equiv (\hat{A})^n$ satisface la relación $(\hat{A}^n)(\hat{A}^m) = \hat{A}^{n+m}$.

3. *a)* Pruebe la desigualdad de Schwartz y la desigualdad triangular utilizando los axiomas que definen el producto interno.

   b) Encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que esta desigualdad se transforme en igualdad.

4. *a)* Sea $\{\{\phi_k\}_{k\in I}\}$ un conjunto discreto de vectores ortonormales. Demuestre que para todo vector arbitrario $|\psi\rangle$ arbitrario se satisface la desigualdad de Bessel:

   $$||\psi||^2 \geq \sum_k |\langle\phi_k|\psi\rangle|^2$$

   ¿En que caso se verifica la igualdad?

   b) Demuestre que el conjunto $\{\phi_k(t) = T^{-1/2}e^{2\pi ikt/T}\}_{k\in Z}$ es un conjunto ortonormal completo en $L^2[0,T]$

5. Se tiene que $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle$ para todo ψ. Pruebe que $\hat{A} = \hat{B}$, en el caso que $\langle\phi_1|\hat{A}|\phi_2\rangle = \langle\phi_1|\hat{B}|\phi_2\rangle$ para todo ϕ_1 y ϕ_2.

6. Demuestre que si $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ y $\hat{B} = \hat{B}^\dagger$, entonces los siguientes son operadores hermíticos:

   a) $\hat{A}^n, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

   b) $\hat{C} \equiv -\frac{1}{2}i[\hat{A},\hat{B}] = -\frac{1}{2}i(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$.

   c) $\Gamma \equiv \frac{1}{2}\{\hat{A},\hat{B}\}_+ = \frac{1}{2}(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})$.

7. Demuestre que si $\hat{A}$ y $\hat{B}$ conmutan con $[\hat{A},\hat{B}]$ entonces:

   $$\exp(\hat{A})\hat{B}\exp(-\hat{A}) = \hat{B} + [\hat{A},\hat{B}] + O(\hat{A}^2)$$

8. Demuestre que si $\hat{A}$ y $\hat{B}$ conmutan con $[\hat{A},\hat{B}]$ entonces:

   $$\exp(\hat{A})\exp(\hat{B}) = \exp(\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]) = \exp(\hat{B})\exp(\hat{A})\exp([\hat{A},\hat{B}])$$

9. Sea $\hat{H}$ un operador hermítico definido positivo, es decir:

   $$\langle u|\hat{H}|u\rangle \geq 0, \qquad \forall|u\rangle.$$

   Demostrar que cualesquiera que sean $|u\rangle$ y $|v\rangle$ se verifica que

   $$|\langle u|\hat{H}|v\rangle|^2 \leq \langle u|\hat{H}|u\rangle\langle v|\hat{H}|v\rangle,$$

   y que la igualdad $\langle u|\hat{H}|u\rangle = 0$ implica necesariamente que $\hat{H}|u\rangle = 0$. Demostrar, por otra parte, que $\mathrm{Tr}(\hat{H}) \geq 0$ y que la igualdad no se cumple más que si $\hat{H} = \hat{0}$

10. Sean $\hat{A}$ y $\hat{B}$ dos operadores hermíticos que satisfacen la relación de conmutación

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C} \ ,$$

donde $\hat{C}$ también es un operador autoadjunto. Sea $|\psi\rangle$ un estado arbitrario; definimos los operadores $\hat{A}' = \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle_\psi$ y $\hat{B}' = \hat{B} - \langle\hat{B}\rangle_\psi$, donde $\langle\hat{O}\rangle_\psi = \langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle$.
Considere la función del parámetro real α, $I(\alpha) = \langle\Phi|\Phi\rangle$, con $|\Phi\rangle = (\alpha\hat{A}' - i\hat{B}')|\psi\rangle$.

a) Demuestre que

$$I(\alpha) = \langle\hat{A}'\rangle^2 \left\{ \alpha + \frac{\langle\hat{C}\rangle}{2\langle\hat{A}'\rangle^2} \right\}^2 + \langle\hat{B}'\rangle^2 - \frac{\langle\hat{C}\rangle^2}{4\langle\hat{A}'\rangle^2}, \qquad \forall\, \mathcal{R}.$$

Use esto para "redescubrir" la relación de incertidumbre de Heisenberg:

$$\langle\hat{A}'^2\rangle\langle\hat{B}'^2\rangle \geq \frac{\langle\hat{C}\rangle^2}{4} \ .$$

11. Sea $\hat{A}$ un operador en un espacio de Hilbert. Se define:

$$\exp(\hat{A}) = \sum_{k\geq 0} \hat{A}^k/k!, \text{ con } \hat{A}^0 \equiv \hat{I}$$

Demuestre que:

a) $\exp(\hat{S}\hat{A}\hat{S}^{-1}) = \hat{S}\exp(\hat{A})\hat{S}^{-1}$

b) si $\hat{A}$ es diagonalizable $\det(\exp(\hat{A})) = \exp(\mathrm{tr}\hat{A})$

c) $\exp(\hat{A})\hat{B}\exp(\hat{-A}) = \sum_{k\geq 0} \hat{A}^k\{\hat{B}\}/k!$, en que $\hat{A}^0\{\hat{B}\} \equiv \hat{B}$ y $\hat{A}^k\{\hat{B}\} = [\hat{A}, \hat{A}^{k-1}\{\hat{B}\}]$

d) si $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}] = [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = 0$ entonces $\exp(\hat{A})\exp(\hat{B}) = \exp(\hat{A} + \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}]/2)$

12. Considere un sistema cuyo Hamiltoniano esta dado por $\hat{H} = \alpha(|\psi_1\rangle\langle\psi_2| + |\psi_s\rangle\langle\psi_1|)$, donde α es un número real que tiene dimensiones de energía.

a) ¿Es $\hat{H}$ un operador de proyección?, ¿que puede decir de $\alpha^{-2}\hat{H}^2$?

b) Muestre que $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ no son autoestados de $\hat{H}$.

c) Calcule los conmutadores $[\hat{H},|\psi_1\rangle\langle\psi_2|]$ y $[\hat{H},|\psi_2\rangle\langle\psi_2|]$, y encuentre la relación entre ellos.

d) Encuentre los autoestados normalizados de $\hat{H}$ y su correspondiente autovalor de la energía.

e) Suponiendo que $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$ forman una base ortonormal completa, encuentre la matriz que representa a $\hat{H}$ en la base. Encuentre los autovalores y autovectores de la matriz y compare los resultados con aquellos deducidos previamente.

13. Considere un sistema físico cuyo espacio de estados está generado por tres kets $|u_1\rangle$,$|u_2\rangle$, $|u_3\rangle$. En esta base, tomadas en ese orden, los dos operadores $\hat{H}$ y $\hat{B}$ estan definidos por:

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \hat{B} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Muestre explícitamente que $\hat{H}$ y $\hat{B}$ conmutan

b) Encuentre una base ortonormal de autovectores comunes a $\hat{H}$ y $\hat{B}$ y exprésela como kets rotulados por sus autovalores.

c) De los siguientes conjuntos de operadores, ¿cuales forman un conjunto completo de observables que conmutan? $\{\hat{H}\}, \{\hat{B}\}, \{\hat{H}, \hat{B}\}, \{\hat{H}^2, \hat{B}\}$.